

蒋祝安. 基于 TASEP 模型的两道交叉情形下车辆运动研究[J]. 智能计算机与应用, 2024, 14(6): 56-63. DOI: 10.20169/j.issn.2095-2163.240608

基于 TASEP 模型的两道交叉情形下车辆运动研究

蒋祝安

(江苏大学 汽车与交通工程学院, 江苏 镇江 212013)

摘要: 输送现象广泛存在于社会中, 对分析车辆运动规律、解决道路拥堵现象具有重要的现实应用价值。完全非对称排它过程 (Totally Asymmetric Simple Exclusion Process, TASEP) 模型是一种描述一维晶格上粒子运输的经典模型, 已被广泛应用于交通领域。本文基于排它过程对双道交叉情境下车辆运动进行仿真研究, 通过在模型中输入粒子 (车辆) 进入以及移出该模型 (十字路口) 的概率 α 和 β , 并多次改变 α 和 β 的大小, 得到不同取值范围下的车辆运动规律密度图, 发现在车辆运动过程中, 系统始终存在 3 个稳定相位: 高密度-高密度相 (HH), 低密度-低密度相 (LL), 高密度-低密度相 (HL)。并且最终得到 α 、 β 与车辆在交叉口中密度的数学关系, 且较为符合真实的交通状况, 同时为研究城市交通流模型提供了借鉴。

关键词: TASEP 模型; 交叉口; 车辆运动; 密度相图; 运动规律

中图分类号: TP393

文献标志码: A

文章编号: 2095-2163(2024)06-0056-08

Simulation study of vehicle motion density in two crossings based on TASEP model

JIANG Zhu'an

(School of Automotive and Traffic Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, Jiangsu, China)

Abstract: The transportation phenomenon exists widely in society, and has important practical application value for analyzing the law of vehicle movement and solving road congestion. The Totally Asymmetric Simple Exclusion Process (TASEP) model is a classic model describing particle transport on a one-dimensional lattice, and has been widely used in the field of transportation. Based on the exclusive process, this paper conducts a simulation study on vehicle movement in the dual-lane intersection situation. By inputting the probability α and β of particles (vehicle) entering and moving out of the model (intersection) into the model, and changing the size of α and β for several times, the density diagram of vehicle motion law under different value ranges can be obtained. It is found that in the process of vehicle movement, there are always three stable phases in the system: high density-high density phase (HH), low density-low density phase (LL), high density-low density phase (HL). Finally, the mathematical relationship between α , β and vehicle density in the intersection is obtained, which is more in line with the real traffic conditions, and provides the reference for the study of urban traffic flow model.

Key words: TASEP model; cross track; vehicle movement; density phase diagram; the law of vehicle movement

0 引言

交通运输作为国民经济发展的一个重要物质生产部门, 是连接各种生产、交换、分配、消费等诸多环节的重要纽带, 也对加速社会经济高质量发展发挥着积极推动作用。其中, 交通道路网作为非常复杂的环节, 大致可以将其分为生产过程的运输和流通过程的运输。交通系统包括人和物的运输、信息传输、交通的设施设备等^[1]。在城市交通网络中, 道路交叉口作为城市交通网络中的结点, 是决定交通

网络系统能否顺畅通行的重要因素。因而, 分析车辆在各个影响因素下出现的不同交通状态的规律, 比如: 形成交通堵塞的机理, 保持交通顺畅的途径对实现道路、汽车的充分利用, 新的交通道路的设计, 以及交通系统的控制尤为重要^[2-3]。交通道路交叉口的正确设计和管理规划对提高城市交通运输能力和保障人民生命安全具有重要意义。

在此背景下, 20 世纪 30 年代交通流理论应运而生, 而完全非对称排它过程 (Totally Asymmetric Simple Exclusion Process, TASEP) 模型就是交通流

基金项目: 江苏大学第 21 批科研立项资助项目 (21A276)。

作者简介: 蒋祝安 (1998-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向: 车辆运动与仿真。Email: 2212019050@ujs.edu.cn

收稿日期: 2023-04-27

哈尔滨工业大学主办 ◆ 学术研究与应用

理论中的一个重要模型^[4]。TASEP 是一种描述一维晶格上粒子运输的经典模型,考虑到了实体之间的体积排斥效应。MacDonald 和 Gibbs(1968)是研究这种模型的先驱^[5],主要将其运用于生物学蛋白质合成过程的研究。在 TASEP 模型中,粒子将沿着一维格子链跳跃,当跳跃方向的相邻位置没有其他粒子时,该粒子方可向前跳跃一步。虽然 TASEP 的原理比较简单,但却可以产生许多动力学行为。从面世至今,该模型已经在生物、物理以及化学等很多领域得到了广泛的研究^[6],例如生物聚合产生的生物聚合物、胶体电泳、蛋白质合成动力学、聚合物动力学、生物运输、晶体表面生长、交通流等^[7]。这就为解决道路交通堵塞、研究交通道路方面的问题提供了一种全新可行有效的方法和思路。

本文结合现实路网和车辆的行驶情况,将路网抽象为一个复杂网络,将道路上的车辆看作粒子,将交叉口看作节点,将道路看作网络的边,通过在模型中输入粒子(车辆)进入以及移出该模型(十字路口)的概率 α 和 β , 多次改变 α 和 β 的大小,得到不同取值范围下的车辆运动规律密度图。根据密度图像的不同确定该模型中存在的密度相(相同类型密度图的集合):高密度-高密度(HH)、低密度-低密度(LL)、高密度-低密度(HL),并确定各密度相之间的边界,进而找到 α 、 β 与车辆在交叉道中密度的数学关系。

1 TASEP 模型简介与更新规则

在 ASEP 模型中,空间是离散的,是由很多格子组成一条链条状的模型,定义任意一个格子编号 i , $1 \leq i \leq L$ 。同样,格子只存在 2 种情况:有且只有一个粒子在其中或者未被占据(空的)。也就是所说的“排他性”。此模型的边界同样是有 2 种:周期性边界以及开边界。其中,周期性边界,就是模型中的格子依次连接形成一个首尾相接的圆环,如图 1 所示。开边界就是模型是随机开放的,移动的粒子数目也是不确定的,可以实现粒子的进入与移出。模型以外的粒子进入第一个格子的概率大小为 α ,尾部格子中的粒子移出的概率大小为 β ,如图 2 所示^[8]。

在此模型中,时间设定为离散。在每个很小的时间内,粒子在这个模型系统中的格子链中移动,如果其前方格子 C 为空,则粒子以大小为 p 的概率向前格子 C 移动;如果其后方格子 D 为空,则粒子以大小为 q 的概率向后方格子 D 移动, p 和 q 满足 $p +$

$q = 1$ 。如果 $p = 1$ 或 $q = 1$,每个时间内粒子只会朝一个方向(移动前方或者移动后方)移动,这样 ASEP 模型更换为 TASEP 模型,此时被叫做“完全非对称排他过程”,本文研究的就是基于 TASEP 模型的一种交叉路口的交通情况。下面简介 TASEP 模型的更新规则。

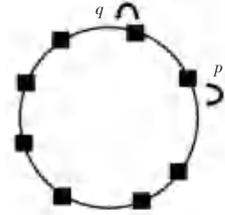


图 1 周期性边界模型

Fig. 1 Periodic boundary model



图 2 开边界模型

Fig. 2 Open boundary model

采用的是随机更新规则,随机更新规则即是每个时间内,随机选中模型中的一个格子进行更新^[9]。如果系统的长度为 L ,即模型中格子数为 L ,编号依次为 $i = 1 \sim L$:

(1)若 $i = 1$,即选中第一个格子。如果格子 1 为空,则模型以外的粒子进入该模型系统的概率为 α 。如果格子 1 不为空,则需看此格子前方的格子($i = 2$ 的格子)有无被其他粒子占用,若 $i = 2$ 的格子未被其他粒子占用,那么在第一个格子被选中的粒子向前跳跃的概率为 1,否则该时间步结束。

(2)若 $i = L$,且格子 L 不为空,则该粒子移出该格子的概率为 β 。如果该格子未被粒子占用,则该时间步结束。

(3)若 $2 \leq i \leq L - 1$,即模型选中了模型内部的格子。同样,先看此格子是否被粒子占用,若被占用,再看 $i = i + 1$ 格子是否被粒子占用;如果 $i = i + 1$ 格子未被粒子占用,那么被选中的格子 $i = j$ 中的粒子向前方跳跃的概率为 1,否则该时间步结束。

(4)为了能够更加有效地模仿出交通道路的状况,对模型中有多少粒子占用格点也同时进行随机更新的方式。

2 交叉道模型规则

本文研究的是基于 TASEP 模型两道交叉情形下车辆的运动密度相位图,该模型即是模拟道路上的十字路口。模型如图 3 所示。该模型有 2 条长度

均为 L 的格子链垂直交叉组成,并且有一个交叉点格点 C 。2 条格子链分别记为 1 道(Lattice 1)和 2 道(Lattice 2)。模型中的粒子(对应交通中的车辆)有一个预先定义的目的地^[10]。下面简介车辆在交叉道当中的运行规则。

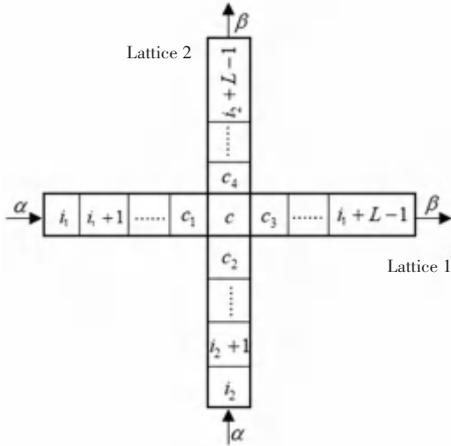


图3 交叉道模型图

Fig. 3 Diagram of cross channel model

(1) 如果 $i = i_1$ (1 道的入口), 且该格点为空, 则粒子以 α 的概率插入格点 i_1 ; 如果格点 i_1 被占用且格点 $i_1 + 1$ 为空, 则粒子以概率 1 位移动到位置 $i_1 + 1$; 否则该时间步结束。

(2) 如果 $i = i_2$ (2 道的入口), 且该格点为空, 则粒子以 α 的概率插入格点 i_2 ; 如果 i_2 被占用且 $i_2 + 1$ 为空, 则粒子以概率 1 位移动到格点 $i_2 + 1$; 否则该时间步结束。

(3) 如果 $i = i_1 + L - 1$ (1 道的出口) 或 $i = i_2 + L - 1$ (2 道的出口), 并且该位置不是空的, 被粒子占据, 则该粒子以 β 的概率被移出。

(4) 如果 $i_1 < i < i_1 + \frac{L}{2} - 1$, 或者 $i_1 + \frac{L}{2} - 1 < i < i_1 + L - 1$, 或者 $i_2 < i < i_2 + \frac{L}{2} - 1$, 或者

$i_2 + \frac{L}{2} - 1 < i < i_2 + L - 1$, 并且该点的位置是被占用的, 此时如果 $i + 1$ 位置为空, 则粒子以概率 1 移动到 $i + 1$ 位置。否则, 该时间步结束。

(5) 如果 $i = C$ (交叉点格点)

① 若 C_3 格点未被粒子占用, 而 C_4 已被粒子占用, 则处于交叉点格点的粒子进入 C_3 格点的概率为 1;

② 若 C_3 格点已被粒子占用, 而 C_4 未被粒子占用, 则处于交叉点格点的粒子进入 C_4 格点的概率为 1;

③ 若 C_3 格点未被粒子占用, 且 C_4 格点也未被粒子占用, 则处于交叉点格点的粒子进入 C_3 格点的概率为 0.5, 进入 C_4 的概率也为 0.5。

3 蒙特卡洛仿真实验与数据分析

在计算机仿真模拟中使用的是蒙特卡洛 (Monte Carlo) 方法, 这种方法也称为统计实验方法或随机模拟方法, 是一种以统计理论方法和概率为基础的计算方法^[11]。概率 α 的取值范围为 $0 \sim 1$ (包括 0 与 1), 概率 β 的取值范围与 α 相同, 1 道与 2 道的格点数 $L = 2\ 000$, 循环次数 $N = 100$, 最终需要找出每个相位之间的边界。

当 α 与 β 在其取值范围内取不同的值时, 蒙特卡洛仿真模拟系统中存在着 3 种不同相位^[12]: 高密度-高密度相位 (HH), 属于该相位的图像, 1 道与 2 道都处于上游高密度区, 如图 4(a) 所示; 低密度-低密度相位 (LL), 属于该相位的图像, 1 道与 2 道都处于下游低密度区, 如图 4(b) 所示; 以及高密度-低密度相位 (HL), 而属于该相位的图像, 1 道与 2 道都是前 1 000 个格点属于上游高密度区, 后 1 000 个格点属于下游低密度区, 且基本对称, 如图 4(c) 所示。

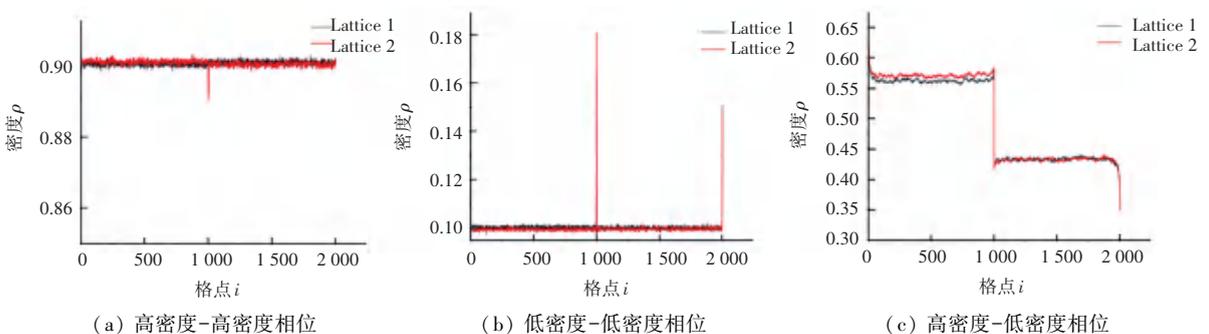


图4 不同密度相位图

Fig. 4 Phase diagram of different densities

为了探寻 α 、 β 与车辆密度之间的关系以及各密度相之间的边界,进行如下仿真。

3.1 模拟 HH 与 LL 之间的边界

如果需要找出 2 个相位之间的边界,可采用控制变量法。首先固定 $\alpha = 0.1$, 然后选不同的 β 值。

(1)取 $\beta = 0.60$, 绘出该数值下系统所属格点密度图的图像,如图 5(a)所示。图 5(a)中,横坐标表示格点位置 i , 纵坐标表示道路密度 ρ , 黑色曲线表示 1 道,红色曲线表示 2 道,可以根据 2 条曲线的状态来判断此时系统处于何种相位。从图 5(a)中可以看出 1 道与 2 道的曲线都处于低密度且基本重叠,由此可以判断当 $\alpha = 0.1, \beta = 0.60$ 时,系统处于

低密度-低密度相位。

(2) $\beta = 0.04$, 绘出该数值下系统所属格点密度图的图像,如图 5(b)所示。从图 5(b)中可以看出, 1 道与 2 道的曲线都处于高密度且基本重叠,由此可判断当 $\alpha = 0.1, \beta = 0.04$ 时,系统处于高密度-高密度相位。

(3)经过多次逼近后,取到 $\beta = 0.10$, 绘出该数值下系统所属格点密度图的图像,如图 5(c)所示。从图 5(c)中可以看出 1 道与 2 道的曲线很不规则,且当格点位置超过 1 500 时,两道完全分散。由此可以判断当 $\alpha = 0.1, \beta = 0.10$ 时,该点基本处于 2 个相位的边界上。

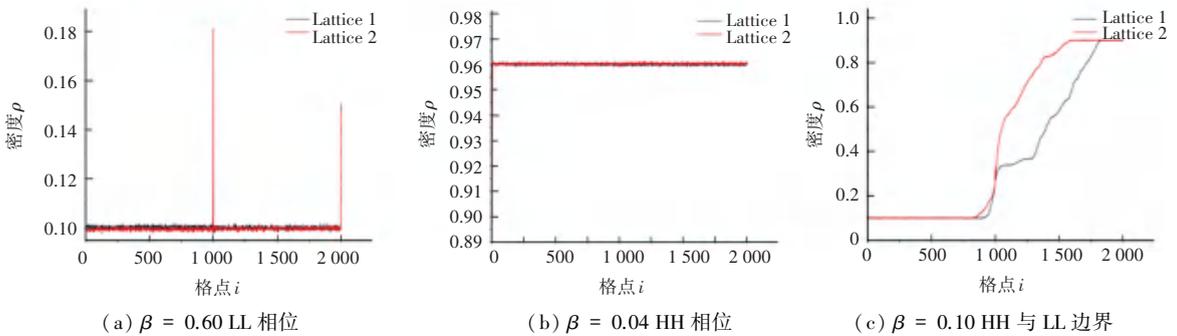


图 5 $\alpha=0.1$ 各密度图

Fig. 5 The density plot when $\alpha=0.1$

上述只找到 HH 与 LL 边界上的一点,仍需继续找出该边界上的其他点,此时改变 $\alpha = 0.2$, 并固定不变,再变化 β 值的大小,来找出该横坐标下的边界点。

(1)取 $\beta = 0.70$, 绘出该数值下系统所属格点密度图的图像,如图 6(a)所示。从图 6(a)中可以看出,1 道与 2 道的曲线都处于低密度且基本重叠,由此可以判断当 $\alpha = 0.2, \beta = 0.70$ 时,系统处于低密度-低密度相位。

度图的图像,如图 6(b)所示。从图 6(b)中可以看出,1 道与 2 道的曲线都处于高密度且基本重叠,由此可以判断当 $\alpha = 0.2, \beta = 0.05$ 时,系统处于高密度-高密度相位。

(3)经过多次仿真逼近后,取到 $\beta = 0.20$, 绘出该数值下系统所属格点密度图的图像,如图 6(c)所示。从图 6(c)中可以看出,1 道与 2 道的曲线很不规则,且当格点位置超过 1 000 时,两道完全分散。由此可以判断当 $\alpha = 0.2, \beta = 0.20$ 时,该点基本处于 2 个相位的边界上。

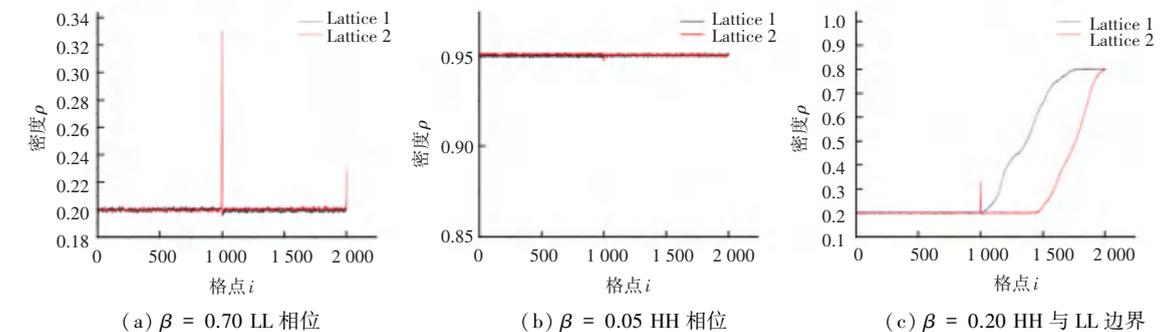


图 6 $\alpha=0.2$ 各密度图

Fig. 6 The density plot when $\alpha=0.2$

取 $\alpha = 0.3$ 并固定不变, 改变 β 值大小。取 $\beta = 0.9$, 绘出该数值下系统所属格点密度图的图像, 如图 7(a) 所示。取 $\beta = 0.1$, 绘出该数值下系统所属格点密度图的图像, 如图 7(b) 所示。再次经过多次

模拟, 取到 $\beta = 0.3$, 绘出该数值下系统所属格点密度图的图像, 如图 7(c) 所示。从图 7 中可以看出, 图 7(a) ~ (c) 分别属于低密度-低密度相位、高密度-高密度相位以及 2 个相位的边界上。

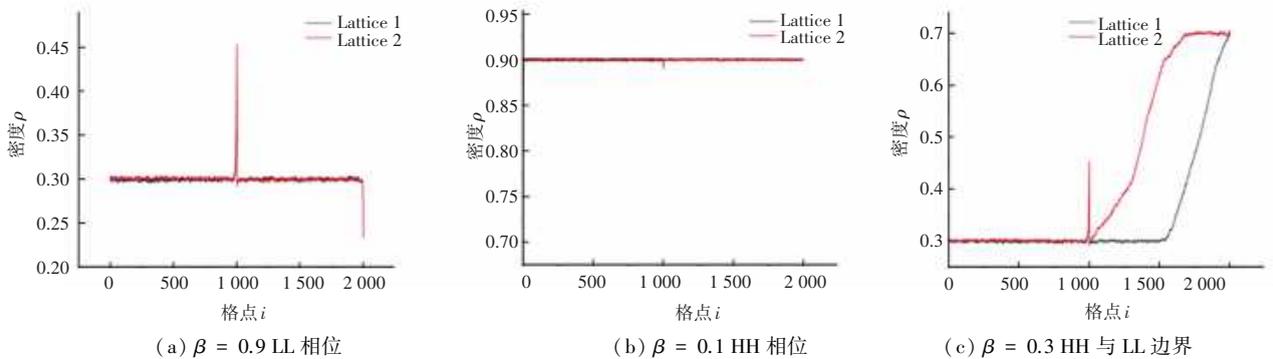


图 7 $\alpha=0.3$ 各密度图

Fig. 7 The density plot when $\alpha=0.3$

还做了其他仿真研究, 分别保持 $\alpha = 0.25, \alpha = 0.35$ 以及 $\alpha = 0.40$ 不变的情况下, 取 $\beta > \alpha, \beta < \alpha$ 以及 $\beta = \alpha$ 的仿真结果, 与上述结果基本相同: 当 $\beta > \alpha$ 时, 图像处于低密度-低密度相位; 当 $\beta < \alpha$ 时, 图像处于高密度-高密度相位; 当 $\beta = \alpha$ 时, 图像处于边界上的一点。因此可以得到, HH 与 LL 的边界线大致为一条 $\beta = \alpha$ 的边界线。

3.2 模拟 LL 与 HL 的边界

将固定几个 β 值不变, 通过改变 α 值的大小来确定这两相之间的边界。首先固定 $\beta = 0.6$ 。

(1) 取 $\alpha = 0.40$, 所得图像见图 8(a)。从图 8(a) 中可以得到: 1 道与 2 道的曲线都处于低密度

相, 且基本重合, 也很规则。由此可以判断当 $\alpha = 0.40, \beta = 0.6$ 时, 系统处于低密度-低密度相位。

(2) 取 $\alpha = 0.50$, 所得图像见图 8(b)。从图 8(b) 中可以得到: 1 道与 2 道在格点位置为 1 000 以前, 系统属于高密度相, 在格点位置为 1 000 之后, 系统属于低密度相, 且 2 个密度相下 1、2 道基本重合, 同时也很规则。由此可以判断, 当 $\alpha = 0.50, \beta = 0.6$ 时, 系统处于高密度-低密度相位。

(3) 经过多次的仿真, 取到 $\alpha = 0.43$, 从图像 8(c) 中可以看出, 1 道与 2 道在格点位置超过 1 000 后, 变得极其不规则, 可大致判定当 $\alpha = 0.43, \beta = 0.6$ 时, 该点处于 HL 与 LL 的边界上。

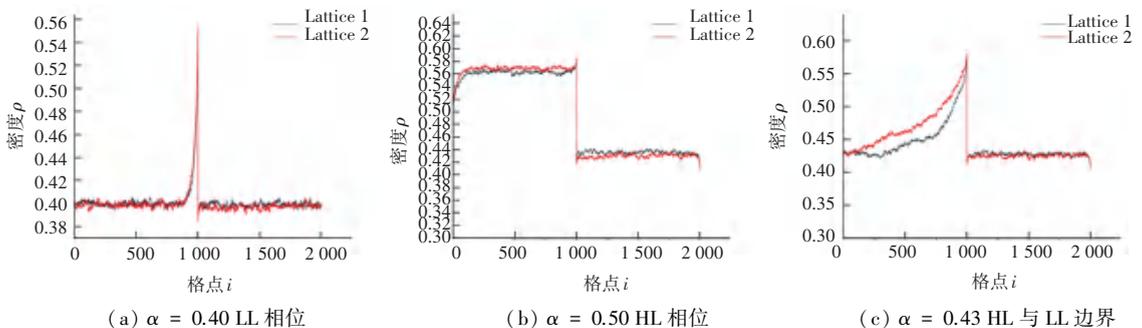


图 8 $\beta=0.6$ 各密度图

Fig. 8 The density plot when $\beta=0.6$

取 $\beta = 0.8$, 分别将 $\alpha = 0.20, \alpha = 0.70$, 以及 $\alpha = 0.43$ 的情况绘出图 9(a)、图 9(b)、图 9(c), 将 3 个图像相对比得出以下结论: $\alpha = 0.43, \beta = 0.8$ 时, 该点位于 HL 与 LL 的边界线上。

同样, 再次改变 β 的值, 定为 $\beta = 0.5$, 分别将 $\alpha = 0.10, \alpha = 0.80$, 以及 $\alpha = 0.43$ 的情况绘出图 10(a)、图 10(b)、图 10(c), 将 $\alpha = 0.10, \alpha = 0.80, \alpha =$

0.43 的图像相对比得出以下结论: 当 $\alpha = 0.43, \beta = 0.5$ 时, 该点位于 HL 与 LL 边界线上。

通过以上的仿真与分析后, 在此边界附近仍做了其他大量的仿真, 例如 $\beta = 0.65, \beta = 0.75, \beta = 0.85$ 以及 $\beta = 0.90$ 等情况下, 基本都是在 $\alpha = 0.43$ 的时候, 这些点位于 LL 与 HL 的边界上。所以可以得出结论, LL 与 HL 的边界线, 为在 $\alpha = 0.43$ 附近的直线。

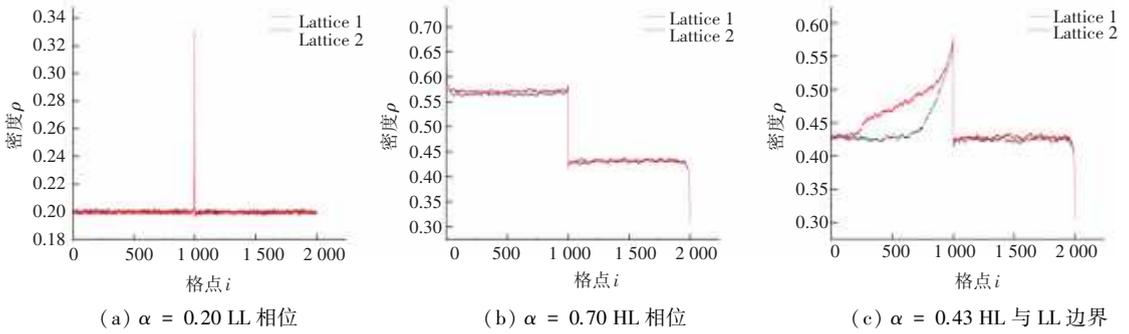


图 9 $\beta=0.8$ 各密度图

Fig. 9 The density plot when $\beta=0.8$

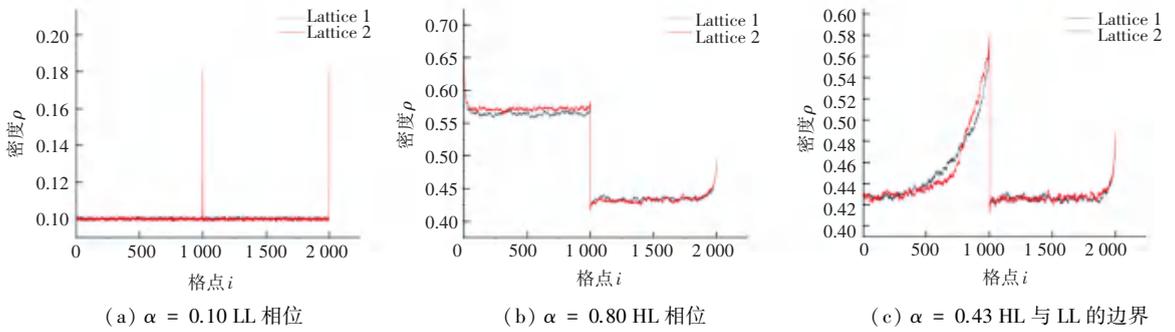


图 10 $\beta=0.5$ 各密度图

Fig. 10 The density plot when $\beta=0.5$

3.3 模拟 HH 与 HL 的边界

与上述一样,首先定一个 α 值不变,这里在程序中令 $\alpha = 0.6$, 接下来取不同的 β 值。

(1)取 $\beta = 0.30$, 在程序中得出数据文本后,在绘图软件中得到图像,如图 11(a)所示,可以看到,1道与2道的曲线都处于高密度区域,且基本重合,图像也较为规则。所以当 $\alpha = 0.6, \beta = 0.30$ 时,系统处于高密度-高密度相位。

(2)取 $\beta = 0.50$, 得到图像如图 11(b)所示,1道与2道的曲线在格点位置为 1 000 之前,都处于高密度相位,在格点位置为 1 000 之后,都处于低密度相位,且图像也较为规则。所以当 $\alpha = 0.6, \beta = 0.50$ 时,系统处于高密度-低密度相位。

(3)经过多次逼近,取到 $\beta = 0.43$, 得到图像如

图 11(c)所示, 1道与2道的曲线在格点位置为 1 000之前,都是较为规则的,但是在格点位置为 1 000之后,1道与2道曲线完全分散,图像也变得不规则。所以当 $\alpha = 0.6, \beta = 0.43$ 时,该点为边界上的一点。

仍需改变 α 的值,定为 $\alpha = 0.7$, 分别将 $\beta = 0.20, \beta = 0.80$, 以及 $\beta = 0.43$ 的情况绘出图 12(a)、图 12(b)、图 12(c),相对比后得出以下结论:当 $\alpha = 0.7, \beta = 0.43$ 时,该点位于这 2 条边界线上。

同样,再次改变 α 的值,定为 $\alpha = 0.9$, 分别将 $\beta = 0.20, \beta = 0.80$, 以及 $\beta = 0.43$ 的情况绘出图 13(a)、图 13(b)、图 13(c)。相对比得出以下结论:当 $\alpha = 0.9, \beta = 0.43$ 时,该点位于这 2 条边界线上。

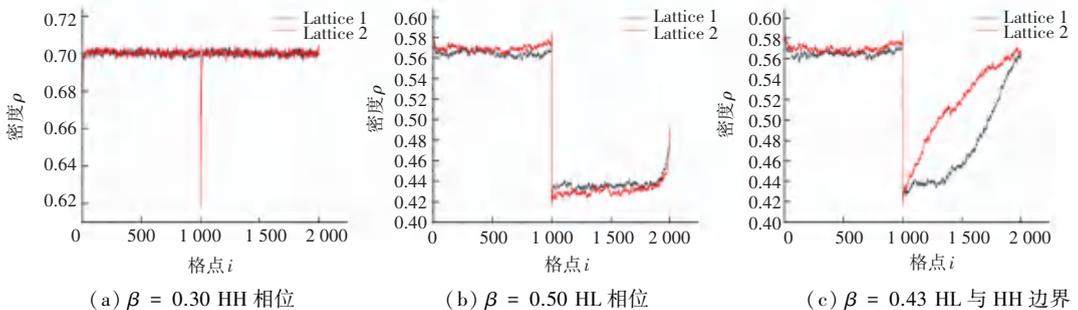
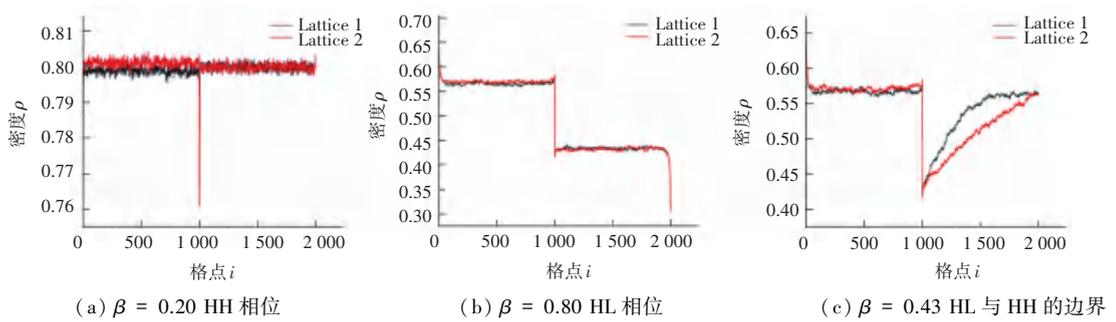
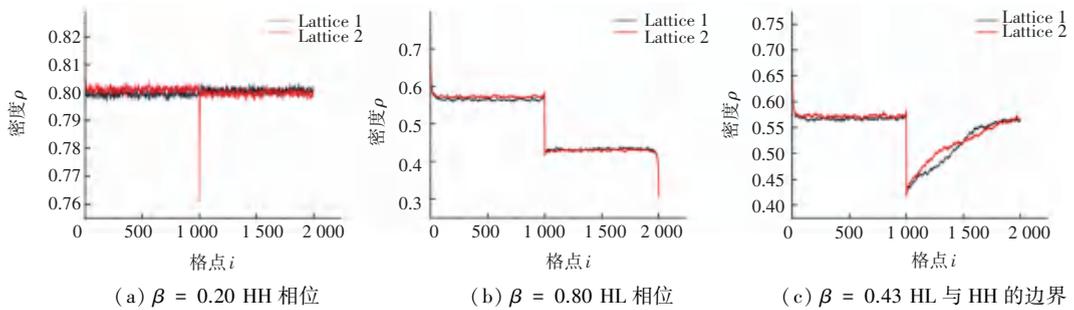


图 11 $\alpha=0.6$ 时密度图

Fig. 11 The density plot when $\alpha=0.6$

图 12 $\alpha=0.7$ 时密度图Fig. 12 The density plot when $\alpha=0.7$ 图 13 $\alpha=0.9$ 时密度图Fig. 13 The density plot when $\alpha=0.9$

通过以上的仿真与分析后,在此边界周围仍做了其他大量的仿真,例如 $\alpha = 0.58, \alpha = 0.76, \alpha = 0.85$ 以及 $\alpha = 0.93$ 等情况下,基本都是在 $\beta = 0.43$ 的时候,这些点位于 LL 与 HL 的边界上。所以可以得出结论,HH 与 HL 的边界线,为在 $\beta = 0.43$ 附近的直线。

3.4 密度相位图及 α 、 β 与车辆密度的关系

将通过 3.3 节的仿真研究得到的图像进行分析进而所得到的边界点,输入到绘图软件当中,得到存在 3 个相位的散点图。通过增加点数,可以将散点图逐渐转变为折线图,如图 14 所示。通过图 14 可看出,该模型下的系统中,有着 3 个相位:高密度-高密度相位(HH)、低密度-低密度相位(LL)、高密度-低密度相位(HL)。其中,HH 与 LL 之间的边界为在 $\beta = \alpha$ 附近的直线;HH 与 HL 之间的边界为 $\beta = 0.43$ 附近的直线;LL 与 HL 之间的边界为 $\alpha = 0.43$ 附近的直线。

通过前述不同的 α 与 β 取值所绘制的图像与车辆运动密度相位图可以得到 α 、 β 与与车辆密度的关系(在 $0 \leq \alpha \leq 1$ 与 $0 \leq \beta \leq 1$ 的取值范围下):

(1)当 $\alpha < 0.43$ 且 $\alpha < \beta$ 时,车辆在交叉道中的运动处于低密度-低密度相位,此时车辆在交叉道中的密度为: $\rho = \alpha$ 。

(2)当 $\beta < 0.43$ 且 $\alpha > \beta$ 时,车辆在交叉道中的运动处于高密度-高密度相位,此时车辆在交叉道中的密度为: $\rho = 1 - \beta$ 。

(3)当 $\alpha > 0.43$ 且 $\beta > 0.43$ 时,车辆在交叉道中的运动处于高密度-低密度相位,此时车辆在交叉道中的密度满足: $\rho_1 + \rho_2 = 1$ 。其中, ρ_1 为车辆在交叉道中前半段的密度, ρ_2 为车辆在交叉道中后半段的密度。

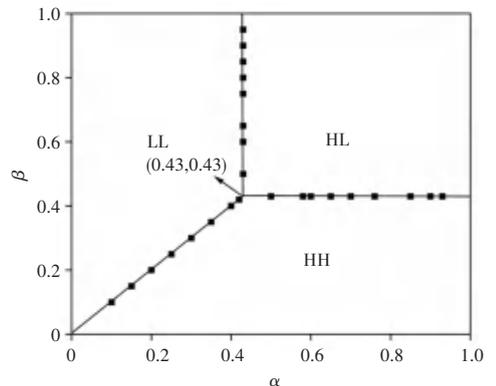


图 14 车辆运动密度相位图

Fig. 14 Phase diagram of vehicle motion density

4 结束语

本文通过 TASEP 模型对双道交叉情形下车辆

运动的密度相图进行仿真研究,确定了双道交叉情形下车辆运动各密度相位图之间的边界,进而确定了各密度相位图在坐标系中的具体位置。并通过多次仿真得到输入粒子即车辆进入该模型的概率 α 、输出粒子即车辆移出该模型的概率 β 与车辆在交叉道中密度的数学关系,且较为符合真实的交通状况,同时为研究城市交通流模型提供了借鉴。

参考文献

- [1] 周承云. 十字交叉道路交通仿真系统设计研究[J]. 西部交通科技, 2021 (8): 193-196.
- [2] 王丽娟. 交通运输网络复杂性及其相关问题的研究[J]. 科技创新, 2017 (21): 188-189.
- [3] 范鑫焯. 基于多层网络结构的都市路网交通流特性研究[D]. 杭州: 浙江工业大学, 2020.
- [4] 阮子瑞, 阮中远, 沈国江. 基于交通路网的 TASEP 模型的扩展研究[J]. 计算机科学, 2020, 47(1): 265-269.
- [5] MACDONALD C T, GIBBS J H, PIPKIN A C. Kinetics of biopolymerization on nucleic acid templates [J]. Biopolymers, 1968, 6(1): 1-5.
- [6] LIU Mingzhe, TUO Xianguo, WANG Ruili, et al. Recent developments in totally asymmetric simple exclusion processes with local inhomogeneity [J]. Chinese Science Bulletin, 2011, 56 (15): 1527-1531.
- [7] GIBBS J H. The kinetics of biopolymerization on nucleic acid templates [M]// SHULER K E. Advances in Chemical Physics: Stochastic Processes in Chemical Physics. USA: Wiley, 2007, 15: 185-198.
- [8] 田波. 非平衡多粒子体系相变问题的解析与模拟研究[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2017.
- [9] IMAMURA T, SASAMOTO T. The q-TASEP with a random initial condition [J]. Theoretical and Mathematical Physics, 2019, 198(1): 69-88.
- [10] YUAN Yaoming, JIANG Rui, WANG Ruili, et al. Spontaneous symmetry breaking in totally asymmetric simple exclusion processes on two intersected lattices [J]. Journal of Physics A Mathematical & Theoretical, 2008, 41(3): 035003.
- [11] YAMAMOTO H, ICHIKI S, YANAGISAWA D, et al. Two-lane totally asymmetric simple exclusion process with extended Langmuir kinetics [J]. arXiv preprint arXiv:2101.10722, 2021.
- [12] 赵勇. 基于排他过程和 SUMO 的交叉道情形下车辆运动的仿真研究[D]. 合肥: 安徽农业大学, 2022.